

穏健トーリック特異点解消の性質について

大阪大学 大学院理学研究科 数学専攻

貝嶋優太郎 (Yutaro KAIJIMA) *

概要

穏健トーリック特異点解消とは, Chavez-Martinez, Duarte, 安田によって導入された, 正規トーリック多様体における F 爆発と本質因子の関係について考察する中で現れる特別な特異点解消のことである. 本稿では, 主に 3 次元の正規トーリック多様体に対し, 穏健トーリック特異点解消がいつ存在するか, また穏健トーリック特異点解消を持つとき, それはどのように特徴づけられるかについて紹介する. 本稿は, 山本雄大氏との共同研究 [KY24] に基づくものである.

1 導入

安田氏によって [Yas12] で導入された e 次 F 爆発 $\mathrm{FB}_e(X)$ とは, 正標数の体上の代数多様体 X に対する Frobenius 射の $e \geq 0$ 回繰り返しの普遍双有理平坦化として定義されるものである. F 爆発に対する自然な問題として, 十分大きな整数 e に対する $\mathrm{FB}_e(X)$ がいつ (クレパント) 特異点解消になるか? というものが考えられる. この問題については, 例えば, 次のようなことが知られている:

- X が 1 次元のとき, 十分大きな e に対し $\mathrm{FB}_e(X)$ は滑らかになる [Yas12].
- X が F-正則曲面のとき, 十分大きな e に対し $\mathrm{FB}_e(X)$ は X の最小特異点解消になる [Har12, TY09, Yas12].
- X が従順な商多様体 ($= \mathbb{A}_k^d/G$, G は有限群で $\mathrm{char} k \nmid \#G$) のとき, 十分大きな e に対し $\mathrm{FB}_e(X)$ は G -Hilbert スキームと同型になる. すなわち, $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{A}_k^d) \cong \mathrm{FB}_e(X)$ ($e \gg 0$) となる [TY09].

したがって, 特に $d = 3, G \subset \mathrm{SL}_3(k)$ のとき, $\mathrm{FB}_e(X)$ は X のクレパント解消になる.

一方で, $\mathrm{FB}_e(X)$ は特異点を持つ場合もある [Har15, HS11, HSY13, LY24]. このような結果を踏まえ, ここでは次のような問題を考えることにする.

問題 1.1. X を正規多様体とし, e を十分大きい整数とする. このとき, X 上空の本質因子は全て $\mathrm{FB}_e(X)$ に素因子として現れるか?

ここで, 本質因子とは X の全ての特異点解消に現れる素因子のことである. 本質因子は, アークの族に関する Nash 問題で登場することで有名である (例えば, [PS15] を参照). また, F 爆発の各点はジェットと見なすことができるため [Yas12], 問題 1.1 は Nash 問題の類似と捉えることもできる.

* E-mail: u797381f@esc.osaka-u.ac.jp

本稿では、正規トーリック多様体の場合に問題 1.1 を考察する。この場合は、基礎体の標数が 0 の場合も Frobenius のような自己射が定義できる。そこで、任意標数における正規アフィントーリック多様体に対する F 爆発を次のように定義する。

定義 1.2 ([Yas12]). M, N を互いに双対な階数 d の自由アーベル群とし、 $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}} := N \otimes \mathbb{R}$ を強凸有理多面錐とする。 $X := \text{Spec } k[\sigma^{\vee} \cap M]$ を σ に付随するトーリック多様体とする。 $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し、 l 次 F 爆発 $\text{FB}_{(l)}(X)$ を埋め込み $M \cap \sigma^{\vee} \hookrightarrow (1/l)M \cap \sigma^{\vee}$ に対応する射

$$F_{(l)}: \text{Spec } k[(1/l)M \cap \sigma^{\vee}] \rightarrow X$$

の普遍双有理平坦化として定義する。

[Yas12] により、F 爆発の列 $(\text{FB}_{(l)}(X))_{l \in \mathbb{Z}_{>0}}$ や正規化された F 爆発の列 $(\widetilde{\text{FB}}_{(l)}(X))_{l \in \mathbb{Z}_{>0}}$ は終始することが知られている。よって、十分大きい l に対する $\text{FB}_{(l)}(X)$ や、 $\text{FB}_{(l)}(X)$ の正規化 $\widetilde{\text{FB}}_{(l)}(X)$ をそれぞれ $\text{FB}_{(\infty)}(X), \widetilde{\text{FB}}_{(\infty)}(X)$ と書くことにする。特に、基礎体の標数が $p > 0$ のときは、 $\text{FB}_{(p^e)}(X) \cong \text{FB}_e(X)$ となる。

近年、Chávez-Martínez, Duarte, 安田の 3 名により問題 1.1 に対し、1 つの解答が与えられた。

定理 1.3 ([CMDY24, Corollary 6.9]). X_{σ} を非退化な強凸有理多面錐 $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ に対応するアフィントーリック多様体とする。このとき、 X_{σ} が穏健トーリック特異点解消を持つならば、全ての BGS 本質因子は $\widetilde{\text{FB}}_{(\infty)}(X_{\sigma})$ に素因子として現れる。

本稿では、上の定理を示すために導入された穏健トーリック特異点解消 (定義 2.6) の性質について考察を行う。特に、いつ穏健トーリック特異点解消が存在するか、また、存在するときそれはどのような性質を持つか、どのように特徴付けられるかという問いに対して、3 次元の場合について解答を与える。

2 準備

M, N を互いに双対な階数 d の自由アーベル群とし、 $M_{\mathbb{R}} := M \otimes \mathbb{R}, N_{\mathbb{R}} := N \otimes \mathbb{R}$ とする。 k を体とする。錐といったら強凸有理多面錐のこととする。 $n \in N$ が原始的であるとは、任意の $0 < \varepsilon < 1$ に対し、 $\varepsilon n \notin N$ となることである。トーリック多様体の基本的な用語については [CLS11] に準拠する。特に、錐や凸包はそれぞれ

$$\begin{aligned} \text{Cone}(u_1, \dots, u_s) &:= \left\{ \sum_{i=1}^s \lambda_i u_i \mid \lambda_i \geq 0 \right\} \subseteq N_{\mathbb{R}} \\ \text{Conv}(S) &:= \left\{ \sum_{u \in S} \lambda_u u \mid \lambda_u \geq 0, \sum_{u \in S} \lambda_u = 1, \text{有限個を除いて } \lambda_u = 0 \right\} \subseteq N_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

という記号を使う。ここで、 $u_1, \dots, u_s \in N$ は原始的であり、 $S \subseteq N_{\mathbb{R}}$ は集合である。

$\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ を錐とし、 $\sigma^{\vee} \subseteq M_{\mathbb{R}}$ を σ の双対錐とする。このとき、 σ に対応するアフィントーリック多様体を

$$X_{\sigma} := \text{Spec } k[\sigma^{\vee} \cap M]$$

と書く. より一般に, $N_{\mathbb{R}}$ の扇 Σ に対し, Σ に対応するトーリック多様体を X_{Σ} と書くことにする.

2.1 BGS 本質因子と Hilbert 基底特異点解消

正規アフィントーリック多様体 X 上空のトーラス不変因子とは, 正規トーリック多様体の間のトーリック固有双有理射 $Z \rightarrow X$ における Z 上の素因子 E のことである. また, 2つの X 上空のトーラス不変因子 $E \subset Z, E' \subset Z'$ が Z と Z' の間の自然な双有理写像によって移りあう (一方の生成点がお互いの生成点に送られる) とき, それらを同一視する.

$\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ を錐とする. このとき, σ に含まれる N の原始元全体の集合と X_{σ} 上空のトーラス不変因子全体の集合には 1 対 1 対応がある [Ful93, pp. 53–54]. この対応により, σ の 1 次元の面は X_{σ} のトーラス不変因子と対応する.

本質因子という概念にはいくつかのバリエーションがあるが, 本稿で用いる本質因子の概念は Bouvier と Gonzalez-Sprinberg により導入された次のようなものである.

定義 2.1 (BGS 本質因子 [BGS95]). 正規アフィントーリック多様体 X 上空のトーラス不変因子が **BGS 本質因子** であるとは, 全てのトーリック特異点解消に素因子として現れるもののことである.

定義 2.2. 錐 $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ に対し, σ の *Hilbert 基底* を

$$\text{Hilb}_N(\sigma) := \{n \in \sigma \cap N \setminus \{0\} \mid \forall n_1, n_2 \in \sigma \cap N, n = n_1 + n_2 \Rightarrow n_1 = 0 \text{ or } n_2 = 0\}$$

と定める. Hilbert 基底はモノイド $\sigma \cap N$ の極小生成系としても特徴付けられる.

Σ を $N_{\mathbb{R}}$ の扇とし, $\Sigma(r)$ を Σ の r 次元の錐の集合とする. このとき, $\rho \in \Sigma(1)$ に対し, ある原始元 $P(\rho) \in \rho \cap N$ がただ 1 つ存在し, $\rho = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot P(\rho)$ と書ける. そこで, $\sigma \in \Sigma$ の極小生成系の集合を

$$\text{Gen}(\sigma) := \{P(\rho) \mid \rho \in \Sigma(1), \rho \preceq \sigma\}$$

と定義する. ここで, $\rho \preceq \sigma$ は ρ が σ の面であることを意味する. また, $N_{\mathbb{R}}$ の扇 Σ に対する極小生成系の集合を

$$\text{Gen}(\Sigma) := \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \text{Gen}(\sigma)$$

と定める.

命題 2.3 ([BGS95, Theorem 1.10]). $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ を錐とする. このとき, $\sigma \cap N$ の原始元 n が $\text{Hilb}_N(\sigma)$ に属することと, n が σ の全ての滑らかな細分 Σ の $\text{Gen}(\Sigma)$ に属することが同値である. これらを満たすとき, 対応するトーラス不変因子は BGS 本質因子である.

定義 2.4 ([SS23]). 錐 $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ の細分 Σ が σ の *Hilbert 基底特異点解消*^{*1} であるとは, Σ が滑らかであり, $\text{Gen}(\Sigma) = \text{Hilb}_N(\sigma)$ となることである.

^{*1} [BGS95] や [Dai02] では, それぞれ G -desingularization, Hilb-desingularization などと呼ばれているが, 今回は [SS23] に近いこの呼称を用いることにする.

2.2 穏健トーリック特異点解消

定義 2.5. $\sigma = \text{Cone}(u_1, \dots, u_s) \subseteq N_{\mathbb{R}}$ を非退化な単体的錐とする. このとき, l_{σ} を各 u_i を 1 に送るような線形関数 $N_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ とする.

Σ を非退化な錐 σ の特異点解消とする. このとき, 各非退化な錐 $\tau \in \Sigma$ は滑らかであるので, 特に単体的である. よって, 定義 2.5 の線形関数 l_{τ} が考えられる.

定義 2.6 ([CMDY24]). Σ を非退化な錐 $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ の細分とする. Σ が σ の穏健トーリック特異点解消であるとは, 任意の非退化な錐 $\tau \in \Sigma$ が滑らかで, $\text{Gen}(\tau)$ が定めるアフィン超平面 $\{x \in N_{\mathbb{R}} \mid l_{\tau}(x) = 1\}$ が σ の全ての 1 次元の面と交わることである.

例 2.7. 任意次元のトーリック多様体に対するトーリッククレパント解消や, 2 次元のトーリック曲面に対する最小特異点解消は穏健トーリック特異点解消になる. また, 任意次元において, X の極小の端末的特異点を持つ $\mathbb{Q}$ -分解的な双有理モデルが滑らかならば, それは X の穏健トーリック特異点解消を与える [CMDY24].

命題 2.8 ([CMDY24, Proposition 6.7]). Σ を非退化な錐 $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ の穏健トーリック特異点解消とする. このとき, $\text{Gen}(\Sigma) = \text{Hilb}_N(\sigma)$ となる. すなわち, 穏健トーリック特異点解消は Hilbert 基底特異点解消である.

2.3 トーリック特異点

定義 2.9. $\sigma = \text{Cone}(u_1, \dots, u_s) \subseteq N_{\mathbb{R}}$ を単体的錐とする. このとき, σ の重複度 (指数) を

$$\text{mult}(\sigma) := [\sigma \cap N + (-\sigma) \cap N : \mathbb{Z}u_1 + \dots + \mathbb{Z}u_s]$$

と定める.

命題 2.10 ([CLS11, Proposition 11.1.8]). $\sigma = \text{Cone}(u_1, \dots, u_s) \subseteq N_{\mathbb{R}}$ を単体的錐とする. このとき,

- (i). σ が滑らかであることと $\text{mult}(\sigma) = 1$ であることが同値.
- (ii). $\text{mult}(\sigma) = \#P_{\sigma}$ である. ここで,

$$P_{\sigma} = \left\{ n \in N \mid n = \sum_{i=1}^s \lambda_i u_i, 0 \leq \lambda_i < 1 \right\}$$

のことである.

- (iii). $e_1, \dots, e_s$ を $\sigma \cap N + (-\sigma) \cap N$ の基底とし, 各 u_i を $u_i = \sum_{j=1}^s a_{ij} e_j$ と表すことにする. このとき,

$$\text{mult}(\sigma) = |\det(a_{ij})|$$

が成り立つ.

注意 2.11. アフィントーリック多様体 X_σ は, 標準的特異点を持つ双有理モデル X_{Σ_c} を持つ. ここで, Σ_c は $\text{Conv}(\sigma \cap N \setminus \{0\})$ の境界面によって生成される扇である. さらに, X_σ の極小の端末的特異点を持つ $\mathbb{Q}$ -分解的な双有理モデルは, Σ_c を $\text{Conv}(\sigma \cap N \setminus \{0\})$ の境界面に属する格子点に沿って単体的に細分して得た扇によって定まる [CLS11, pp. 552–554].

3 主定理

まず, X が端末的特異点を持つ $\mathbb{Q}$ -分解的な滑らかでないアフィントーリック多様体の場合を考える.

- (i). $\dim X = 3$ のとき, 対応する錐 σ は $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, p, q)$ ($1 \leq p < q, \gcd(p, q) = 1$) で生成される [Oda88, pp. 34–36].
- (ii). $\dim X = 4$ で Gorenstein のとき, 対応する錐 σ は $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, a, r - a, r)$ ($1 \leq a \leq r - a, \gcd(a, r) = 1$) で生成される ([MS84], [BBBK11], [CLS11, Proposition 11.4.19 (a)]).

これらのトーリック特異点が穏健トーリック特異点解消を持たないことが次の定理から従う.

定理 3.1 ([KY24, Theorem 3.3]). $d \geq 3$ とし, $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ を

$$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1, 0), (a_1, a_2, \dots, a_d)$$

で生成される d 次元錐とする. ここで, $a_1, a_2, \dots, a_d \in \mathbb{Z}, a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{d-1} < a_d, 1 \leq a_1 \leq d-2$ である. このとき, σ に対応するアフィントーリック多様体 X_σ は穏健トーリック特異点解消を持たない.

以下, 証明の概略を述べる. σ が穏健トーリック特異点解消 Σ を持つと仮定する. このとき, 穏健トーリック特異点解消が Hilbert 基底特異点解消であること (命題 2.8) と命題 2.10 を用いると, Σ は $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1, 0), (1, 1, \dots, 1)$ で生成される錐を含むことが分かる. これは Σ の非退化な錐であるが, 穏健トーリック特異点解消の定義を満たさないため, Σ が σ の穏健トーリック特異点解消であることに矛盾する. ゆえに, σ は穏健トーリック特異点解消を持たない.

これを用いて, 3 次元の穏健トーリック特異点解消は次のように特徴付けることができる.

定理 3.2 ([KY24, Theorem 3.9]). X を 3 次元アフィントーリック多様体とする. このとき, X が穏健トーリック特異点解消を持つならば, それは X のある極小の端末的特異点を持つ $\mathbb{Q}$ -分解的な双有理モデルになる.

これは, Hilbert 基底特異点解消に関する次の事実を用いる.

補題 3.3 ([BGS95, Theorem 2.22]). 3 次元アフィントーリック多様体 X の任意の Hilbert 基底特異点解消は, X のある極小の端末的特異点を持つ $\mathbb{Q}$ -分解的な双有理モデルを支配する.

穏健トーリック特異点解消は Hilbert 基底特異点解消なので (命題 2.8), 補題 3.3 を適用することが

できる. これと, 定理 3.1 から得られた $\mathbb{Q}$ -分解的な末端的特異点を持つ 3 次元アフィントーリック多様体が穏健トーリック特異点解消を持たないことを用いると, 定理 3.2 が示される.

注意 3.4 ([KY24, Corollary 3.11]). 定理 3.2 から, 穏健トーリック特異点解消を持つトーリック多様体はかなり珍しく, 例えば, 標準的特異点を持つ 3 次元アフィントーリック多様体 X が穏健トーリック特異点解消を持つならば, それは X のクレパント解消になる.

例 3.5. 標準的特異点を持たないトーリック多様体で, 穏健トーリック特異点解消を持つ例として, $\text{Cone}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (r - 1, r - 1, r))$ ($r \geq 4$) などがある.

参考文献

- [BBBK11] Margherita Barile, Dominique Bernardi, Alexander Borisov, and Jean-Michel Kantor. On empty lattice simplices in dimension 4. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 139(12):4247–4253, 2011.
- [BGS95] Catherine Bouvier and Gérard Gonzalez-Sprinberg. Système générateur minimal, diviseurs essentiels et G -désingularisations de variétés toriques. *Tohoku Math. J. (2)*, 47(1):125–149, 1995.
- [CLS11] David A. Cox, John B. Little, and Henry K. Schenck. *Toric varieties*, volume 124 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
- [CMDY24] Enrique Chávez-Martínez, Daniel Duarte, and Takehiko Yasuda. F-blowups and essential divisors for toric varieties, 2024. arXiv:2304.13247.
- [Dai02] Dimitrios I. Dais. Resolving 3-dimensional toric singularities. In *Geometry of toric varieties*, volume 6 of *Sémin. Congr.*, pages 155–186. Soc. Math. France, Paris, 2002.
- [Ful93] William Fulton. *Introduction to toric varieties*, volume 131 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. The William H. Roever Lectures in Geometry.
- [Har12] Nobuo Hara. F-blowups of F-regular surface singularities. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 140(7):2215–2226, 2012.
- [Har15] Nobuo Hara. Structure of the F-blowups of simple elliptic singularities. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 22(1):193–218, 2015.
- [HS11] Nobuo Hara and Tadakazu Sawada. Splitting of Frobenius sandwiches. In *Higher dimensional algebraic geometry*, volume B24 of *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, pages 121–141. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2011.
- [HSY13] Nobuo Hara, Tadakazu Sawada, and Takehiko Yasuda. F-blowups of normal surface singularities. *Algebra Number Theory*, 7(3):733–763, 2013.
- [KY24] Yutaro Kaijima and Yudai Yamamoto. Properties of moderate toric resolutions in dimension three, 2024. arXiv:2412.01177.

- [LY24] Christian Liedtke and Takehiko Yasuda. Non-commutative resolutions of linearly reductive quotient singularities. *Q. J. Math.*, 75(3):969–985, 2024.
- [MS84] David R. Morrison and Glenn Stevens. Terminal quotient singularities in dimensions three and four. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 90(1):15–20, 1984.
- [Oda88] Tadao Oda. *Convex bodies and algebraic geometry*, volume 15 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. An introduction to the theory of toric varieties, Translated from the Japanese.
- [PS15] Camille Plénat and Mark Spivakovsky. The Nash problem and its solution: a survey. *J. Singul.*, 13:229–244, 2015.
- [SS23] Kohei Sato and Yusuke Sato. Hilbert basis resolutions for three-dimensional canonical cyclic quotient singularities. In *McKay correspondence, mutation and related topics*, volume 88 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 209–225. Math. Soc. Japan, Tokyo, [2023] ©2023.
- [TY09] Yukinobu Toda and Takehiko Yasuda. Noncommutative resolution, F-blowups and D -modules. *Adv. Math.*, 222(1):318–330, 2009.
- [Yas12] Takehiko Yasuda. Universal flattening of Frobenius. *Amer. J. Math.*, 134(2):349–378, 2012.